УДК 514.76

В. С. Малаховский*[1]*, Ю. И. Шевченко*[1]*, А. И. Егоров*[2]*,
***М. А. Родионов*[2]*, Н. В. Садовников*[2]*, А. Я. Султанов*[2]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград,*
[2] *Пензенский государственный университет, eskrydlova@kantiana.ru*

Выдающийся математик — Иван Петрович Егоров (К 100-летию со дня рождения)

Эта работа посвящена 100-летию выдающегося математика — И. П. Егорова, изложены факты из его личной жизни и перечислены основные вопросы его научной деятельности.

Профессор И. П. Егоров, 1984 г.

Выдающийся математик, заслуженный деятель науки РСФСР, доктор физико-математических наук, профессор И. П. Егоров родился 25 июля 1915 года в селе Большая Садовка Сосновоборского района Пензенской области. Его отец, сельский учитель, еще в детские годы привил сыну любовь к математике. После окончания в 1932 году Кузнецкого педагогического техникума Иван Петрович в течение двух лет работал учителем в Анненковской школе крестьянской молодежи. В 1934 году он стал студентом Казанского университета. Природные способности, огромное трудолюбие, любовь к математике определили дальнейшую его судьбу. После блестящего окончания университета в 1939 году И. П. Егоров поступил в аспирантуру к профессору П. А. Широкову.

Иван Петрович всегда с особенной теплотой вспоминал своего первого научного наставника известного математика XX столетия П. А. Широкова, основателя научной геометрической школы в области дифференциальной геометрии.

После создания Пензенского педагогического института Иван Петрович с 1943 года работал преподавателем, доцентом, профессором, заведующим математическими кафедрами этого института.

В 1945 году И. П. Егоров защитил в Казанском университете кандидатскую, а в 1956 году при Московском университете — докторскую диссертации. В 1957 году он был утвержден в звании профессора.

И. П. Егоров был мастером-педагогом. Он более 40 лет читал курсы лекций по различным разделам математики, руководил научным семинаром, подготовил более 15 кандидатов и докторов наук.

Много сил и времени Иван Петрович отдал работе над учебниками для студентов пединститутов, учителей математики. Большим успехом пользуются его «Введение в неевклидовы геометрии», «Лекции по аксиоматике Вейля и неевклидовым геометриям», «Движения в обобщенных пространствах», «Геометрия», «Основания геометрии». Учебное пособие «Геометрия» было переведено на венгерский язык и выдержало там несколько изданий.

В течение многих лет И. П. Егоров был референтом журнала «Математика», а также зарубежных периодических изданий по математике.

И. П. Егоров успешно вел и большую общественную работу. Он избирался депутатом Верховного Совета СССР шестого и седьмого созывов. Долгие годы Иван Петрович был членом учебно-методической комиссии Министерства просвещения

СССР, членом бюро Всесоюзного геометрического семинара им. Г. Ф. Лаптева. Он основал межвузовский сборник научных трудов «Движения в обобщенных пространствах» и был его научным редактором.

Ивана Петровича отличали исключительная скромность, доброжелательность и глубокое уважение к людям, целеустремленность, собранность, постоянная и настойчивая работа над избранной темой, стремление к всестороннему и окончательному решению поставленных задач.

Доброе сердце и отзывчивость Ивана Петровича были известны всем, кому приходилось обращаться к нему с какой-либо просьбой. Стоит отметить, что наравне с неизменно присущими ему строгостью, принципиальностью и гражданской позицией Иван Петрович отличался необыкновенной деликатностью и природной интеллигентностью, которые и позволяли ему «сглаживать острые углы» многих дискуссий и примирять оппонентов в прениях самого различного уровня.

Человек большой души, высокой культуры, Иван Петрович привлекал к себе людей. Около него на факультете всегда группировалась пытливая и наиболее способная молодежь. Он во многом содействовал воспитанию высокой математической и методической культуры будущего учителя. В коллективе института он пользовался заслуженным авторитетом.

За самоотверженный труд И. П. Егоров награжден орденом Трудового Красного Знамени, медалями, значком «Отличник народного образования», ему присвоено почетное звание Заслуженного деятеля науки РСФСР.

С его именем связано одно из интересных и плодотворных направлений в теории движений обобщенных пространств — теория лакун в порядках групп движений и геометрии соответствующих лакунарных пространств. Начало этому положили его труды, опубликованные с середины 40-х годов и получившие вскоре широкую известность во всем мире.

Первые же публикации Ивана Петровича, посвященные группам движений в пространствах аффинной связности, определили всю последующую область его исследований о лакунарном распределении порядков групп автоморфизмов этих пространств, о геометрии пространств соответствующей лакунарности и строении самих групп. По указанным вопросам им опубликовано около 70 работ, в том числе 15 в ДАН СССР.

Многие результаты И. П. Егорова были заново получены другими методами зарубежными авторами и перенесены на обобщенные пространства. Они были включены в монографии крупнейших геометров: И. Схоутена («Исчисление Риччи»), К. Яно («Теория дифференцирования Ли и ее приложения»), Ш. Кобаяси («Лекции по дифференциальной геометрии»).

Об актуальности и значимости работ И. П. Егорова свидетельствует и поток научных публикаций, вызванных его исследованиями. В обзорных статьях «Движения в обобщенных дифференциально-геометрических пространствах» (в сборнике «Алгебра. Топология. Геометрия. 1965»), «Автоморфизмы в обобщенных пространствах» («Проблемы геометрии», 1978, т. 10) и «Движения и гомотетии в пространствах Финслера и их обобщения» («Проблемы геометрии, т. 16), написанных И. П. Егоровым, излагается содержание более тысячи работ по указанным проблемам. Много времени уделял И. П. Егоров учебно-методической литературе по математике. Особенно большим спросом среди студентов, учителей, преподавателей вузов пользуются его учебные пособия: «Введение в неевклидовы геометрии», «Лекции по аксиоматике Вейля и неевклидовым пространствам», «Геометрия» и «Обобщенные пространства».

Основателем теории движений И. П. Егоровым выделено три основных направления. Первое — характеризуется изучением движений в заданных римановых пространствах, пространствах аффинной связности и их обобщениях. Это направление является наиболее естественным и геометрическим. Второе — теоретико-группового характера — о построении по заданной группе Ли преобразований дифференцируемого многообразия, инвариантной метрики или связности на этом многообразии. Оно возникло в 20-е годы XX столетия. Третье, — в котором пространства и группы движений подлежат определению, — пограничное с первыми двумя. Начало этому направлению дали исследования И.П. Егорова. Его внимание привлекла теорема Фубини, опубликованная в 1903 году: не существует римановых пространств V_n с полной группой движений G_r, порядка $r = \frac{n(n+1)}{2} - 1$, то есть на единицу меньше наивысшего порядка $\frac{n(n+1)}{2}$, который допускают лишь пространства постоянной кривизны и только они. Вопрос о том, существуют ли другие «запрещенные» порядки полных групп движений в римановых пространствах, а также в других обобщенных пространствах, оказался чрезвычайно сложным и в течение более 40 лет оставался открытым.

Иван Петрович впервые поставил аналогичный вопрос для пространств аффинной связности: существуют ли пространства аффинной связности A_n, обладающие полными группами движений порядка $r = n^2 + n - 1$? Применив очень тонкий и оригинальный метод, основанный на изучении условий интегрируемости уравнений движений исследуемых пространств, в 1945 году он получил выдающийся результат: не существует пространств аффинной связности, допускающих полные группы движений G_r с порядками $r : n^2 < r < n^2 + n$.

Таким образом, был выявлен впервые в теории движений интервал «запрещенных» порядков групп движений для пространств аффинной связности. Естественно возникает задача установления аналогичных интервалов, лежащих ниже. Эти интервалы были названы лакунами. Промежутки, разделяющие каждые две соседние лакуны, называются отрезками конденсации. Каждому натуральному числу r отрезка конденсации соответствуют классы пространств аффинной связности, допускающие полные группы движений порядка r. Из исследований И.П. Егорова следует, что с возрастанием размерности пространств увеличиваются длины лакун и их количество.

В дальнейшем Иван Петрович нашел точные границы ряда лакун и охарактеризовал пространства соответствующих лакунарностей. В основу его метода по существу положено изучение порядков групп изотропии точки М, которые, как известно, в топологическом смысле изоморфны стационарной группе в этой точке. В 1952 году И. П. Егоров доказал прекрасную теорему, которая имеет много важных следствий: максимальный порядок групп движений пространств A_n, для которых симметрическая часть тензора Риччи имеет ранг m ($0 \leq m \leq n$), равен $n^2 - (m-1)n + \frac{m(m-1)}{2}$. Отсюда следует, что порядок полных групп движений максимально подвижных пространств аффинной связности, отличных от эквиаффинных, не больше $n^2 - n + 3$. Далее он доказывает, что пространства второй лакунарности обладают полными группами движений порядка n^2 или $n^2 - 1$, причем группы порядка n^2 являются транзитивными. Более того, он дал тензорную характеристику максимально подвижным пространствам аффинной связности: пространство A_n ненулевой кривизны тогда и только тогда обладает максимальной подвижностью (т. е. допускает группы движений G_r максимального порядка равного $r = n^2$), когда выполнены следующие условия: 1) A_n является эквиаффинным пространством, 2) $R_{\alpha\beta} = \varepsilon(1-n)\lambda_\alpha \lambda_\beta$, ($\varepsilon = \pm 1$), 3) $\lambda_{\alpha,\beta} = c\lambda_\alpha \lambda_\beta$, $c = const$, $(\alpha, \beta = 1,2,...,n)$.

Несколько позже И. П. Егоров дал следующую интересную геометрическую характеристику максимально подвижных пространств аффинной связности: пространство A_n ненулевой кривизны тогда и только тогда является максимально подвижным, когда оно проективно евклидово и допускает $n-1$ независимых абсолютно параллельных контравариантных векторных полей. Полученные результаты позволили ему перечислить канонические виды коэффициентов связностей всех максимально подвижных пространств A_n, второй лакунарности с транзитивными, а также интранзитивными, группами движений. Эта задача оказалась весьма непростой. При ее решении

И.П. Егоров использовал групповые свойства изучаемых пространств. Прежде всего им доказано, что для всякого максимально подвижного пространства A_n ненулевой кривизны однопараметрическое семейство гиперповерхностей $\lambda(x^1, x^2, ..., x^n) = c$, где c — параметр, служащий системой импримитивности полной группы движений. Каждая поверхность этого семейства является вполне геодезической. Все эти свойства позволяют специальным образом выбрать проективно-евклидову систему координат, в которой система дифференциальных уравнений (относительно компонент Γ^i_{jk} объекта связности максимально подвижного пространства) имеет наиболее простой вид. Далее интегрируя ее и применяя допустимые преобразования проективно-евклидовых координат, он доказал, что коэффициенты связности Γ^i_{jk} максимально подвижного пространства ненулевой кривизны с транзитивной группой движений всегда можно привести в виду

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \ \varphi_1 = -\frac{x^1}{x^{1^2} + 4\varepsilon} \ (\varepsilon = \pm 1),$$

остальные $\varphi_k = 0$, если A_n — симметрическое пространство, или в других случаях

$$\Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \varphi_k + \delta^i_k \varphi_j, \ \varphi_1 = -\frac{x^1 + 1}{x^{1^2} + \gamma}, \ (i, j, k = 1, 2, ..., n),$$

остальные $\varphi_k = 0$, γ — некоторая постоянная, причем $\gamma + 1 \neq 0$.

Изучая строение групп движений максимально подвижных пространств, И.П. Егоров установил, что они совпадают с группами проективных преобразований, оставляющими инвариантным абсолют $x^{1^2} + \gamma = 0$. Существует три типа таких пространств: гиперболический ($\gamma < 0$), эллиптический ($\gamma > 0$) и параболический ($\gamma = 0$).

Позднее И. П. Егоров определил глобальную структуру этих максимально подвижных пространств. Центры алгебр Ли полных групп движений максимально подвижных пространств в каждом из типов сводятся к нулевому вектору. Отсюда следует, что алгебры Ли рассматриваемых групп допускают изоморфные присоединенные представления. Далее им строится в каждом случае инъективное экспоненциальное отображение в линейную группу невырожденных $n \times n$ матриц и устанавливается для каждого типа возможная топологическая структура односвязной накрывающей группы. Другие возможные топологические и дифференцируемые структуры получаются из универсальной накрывающей группы стандартным методом — путем факторизации по ее дискретному нормальному делителю. Учитывая затем возможную стационарную подгруппу H_{r_0} $(r_0 = n^2 - n)$, он определяет искомые глобальные пространства аффинной связности как пространства классов смежности разложения группы G_r по H_{r_0}.

При исследовании пространств аффинной связности второй лакунарности И. П. Егоров впервые отметил существование пространств A_n, допускающих полные интранзитивные группы движений. Максимальный порядок интранзитивных групп движений пространств аффинной связности A_n равен $n^2 - 1$. И. П. Егоров доказал существование лакуны $(n^2 - n, n^2 - 1)$ в распределении порядков интразитивных групп движений пространств аффинной связности. Для максимально подвижных пространств аффинной связности с интранзитивными группами движений он получил канонические виды коэффициентов связности Γ^i_{jk}. Для пространств максимальной подвижности с интранзитивными группами движений получена тензорная характеристика. Отметим еще один интересный результат И. П. Егорова: максимально подвижные пространства A_n ненулевой кривизны являются пространствами первого класса, то есть они могут быть реализованы в виде некоторой гиперповерхности в аффинно-евклидовом пространстве ($n+1$) измерения при надлежащем выборе нормали.

И. П. Егоров доказал существование второй и третьей лакун в распределении полных транзитивных групп движений пространств аффинной связности:

$$n^2-n+1<r<n^2,\ n^2-2n+5<r<n^2-n+2$$

соответственно и исследовал пространства третьей лакунарности. Им доказано, что пространства третьей лакунарности допускают полные группы движений порядка r, где $n^2-n-1\le r<n^2-n+1$.

И. П. Егоров также исследовал движения в пространствах аффинной связности ненулевого кручения. Им доказано, что наибольший порядок полных групп движений пространств L_n аффинной связности с кручением равен n^2. Максимально подвижные пространства необходимо являются пространствами полусимметрической связности. В 1950 году им получен признак полусимметричности аффинной связности и доказана теорема о максимальном порядке полных групп движений пространств L_n общей несимметрической связности: наибольший порядок полных групп движений пространств L_n равен $n^2–2n+6$. Далее, исследуя сопутствующие связности максимально подвижных пространств L_n, И. П. Егоров установил, что это связности обычного аффинного пространства. Несколько позже он дал тензорную характеристику максимально подвижным пространствам, доказал, что групповые пространства полусимметрической связности являются максимально подвижными; в этом случае любая пара операторов исходной группы образует двучленную подгруппу. Определены все пространства полусимметрической связности, допускающие группы движений порядка n^2 или n^2-1. В это же время И. П. Егоров доказывает наличие лакун в распределении порядков полных групп движений в пространствах L_n, определяет все полусимметрические связности первой лакунарности, все пространства полусимметрической связности с группами движений G_r порядка $r = n^2 - n + 1$.

При исследовании пространств аффинной связности A_n случай *n = 2* оказывается исключительным. Для изучения подвижности пространств A_2 им был построен специальный метод исследования. На этом пути И. П. Егоров получил классификацию всех двумерных пространств аффинной связности A_2, допускающих группы движений, и дал им геометрическую характеристику.

Фундаментальные результаты он получил при изучении коллинеаций аффинносвязных пространств. Им была установлена лакуна в распределении порядков групп коллинеаций пространств аффинной связности. Доказано, что максимальный порядок групп коллинеаций в не проективно-евклидовых пространствах A_n равен точно $n^2 - 2n + 5$ или $n^2 - 3n + 8$ в зависимости от структуры пространства (1949 год).

Более поздние работы И. П. Егоров посвящает изучению движений в различных обобщениях пространств аффинной связности. В 1971 году он установил, что максимальный порядок групп движений пространств центропроективной связности равен точно n^2, доказал существование трех и только трех типов (эллиптического, гиперболического, параболического) максимально подвижных пространств центропроективной связности. Для каждого из типов определены объекты связности. Эти результаты обобщены им для центропроективных связностей копункторов.

Существенные результаты И. П. Егоров получил также при изучении движений и гомотетических преобразований в римановых пространствах. В 1949 году им были доказаны следующие фундаментальные теоремы:

1. Максимальный порядок полных групп движений неэйнштейновых римановых пространств равен $\frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Пространства, реализующие эту подвижность, являются приводимыми; систему координат всегда можно выбрать так, что $ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + d\sigma^2$, где $d\sigma^2$ определяет линейный элемент пространства ненулевой постоянной кривизны от $(n-1)$ переменных.

2. Порядок полных групп движений римановых пространств V_n, отличных от пространств постоянной кривизны, не больше $\dfrac{n(n-1)}{2}+1$.

Таким образом, полностью был решен вопрос о существовании первой лакуны — интервале запрещенных порядков —

$$\left(\frac{1}{2}n(n-1)+1, \frac{1}{2}n(n+1)\right).$$

И. П. Егоров определил все неэйнштейновы максимально подвижные пространства, дал им алгебраическую и геометрическую характеристики, доказал, что искомые пространства являются субпроективными. Таким образом, И. П. Егоров впервые дал групповую характеристику субпроективным пространствам: субпроективные пространства непосредственно предшествуют в смысле подвижности пространствам постоянной кривизны, более того, они являются пространствами второй лакунарности.

В 1962 году Иван Петрович исследует пространства третьей лакунарности и доказывает, что максимально подвижные пространства третьей лакунарности являются неэйнштейновыми. В этих пространствах произвольной сигнатуры, отличных от пространств постоянной кривизны, максимальный порядок групп движений равен $\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+5$.

Многие геометры занимались изучением четырехмерных римановых пространств и движений в них (эти пространства тесно связаны с обшей теорией относительности). Еще в начале нашего столетия Фубини дал классификацию римановых пространств V_4 по группам движений. Долгое время эта классификация считалась исчерпывающей. И. П. Егоров показал, что в силу незаконного перенесения свойств комплексных групп на действительные Фубини пропустил важные классы пространств. В частности, были пропущены максимально подвижные пространства непостоянной кривизны с полными группами движений G_8 (из классификации Фубини следует, что максимальный порядок полных групп движений в четырехмерных римановых пространствах непостоянной кривизны равен 7). Все пропущенные пространства V_4 и их полные группы движений И. П. Егоровым были найдены, а для максимально подвижных пространств он дал геометрические характеристики.

И. П. Егоров установил лакунарный характер распределения порядков полных групп гомотетических преобразований в пространствах V_n. Он доказал, что не существует римановых пространств V_n с полной группой G_r гомотетических движений, если $\frac{n(n-1)}{2}+2<r<\frac{n(n+1)}{2}+1$. Им найдены гомотетически подвижные субпроективные пространства основного случая. Он установил, что субпроективные пространства исключительного случая допускают гомотетии. Римановы пространства второй лакунарности в гомотетическом смысле являются субпроективными пространствами. Они допускают группы гомотетических движений порядка $\frac{n(n-1)}{2}+1$ или $\frac{n(n-1)}{2}+2$. И. П. Егоров доказал также наличие второй лакуны: не существует пространства V_n, допускающего полную группу гомотетических движений, порядок r которой удовлетворяет неравенствам $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+6<r<\frac{n(n-1)}{2}+1$.

Максимально подвижные в гомотетическом смысле пространства третьей лакунарности допускают группу порядка $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+6$. Им полностью решена задача определения всех гомотетически подвижных V_n третьей лакунарности. И.П. Егоров установил максимальный порядок групп гомотетических преобразований в финслеровых пространствах. Этот порядок равен $\frac{n(n-1)}{2}+3$.

Изучая действия подобных преобразований на поверхности евклидова пространства E_2, И.П. Егоров обнаружил существование поверхностей, обладающих следующим замечательным свойством. Указанные преобразования любую такую поверхность преобразуют в поверхность, которая лишь положением отличается от исходной. Среди этих поверхностей есть и наложимые на поверхность вращения. Полученный класс поверхностей порождает римановы пространства, допускающие подобные преобразования. Степени подвижности их соответственно равны 1 и 2.

И.П. Егоров изучал также свойства групп G_r аналитических гомотетических движений в бергмановых метриках и метриках Келера—Широкова, где также получил ряд замечательных результатов. (Эти исследования относятся к комплексному анализу).

В 80-е годы он занимался исследованием движений и гомотетических преобразований в потенциальных и общих метрических пространствах векторных и ковекторных элементов (векторных и ковекторных плотностей).

Под влиянием основополагающих работ И.П. Егорова появились и появляется в настоящее время множество работ российских и зарубежных математиков

Интересные результаты по движениям в различных пространствах были получены Вангом, Яно, Врэнчану, Муто, Кобаяси, Хирамацу, Окубо и другими авторами, а также советскими геометрами Г. И. Кручковичем, П. К. Рашевским, А. З. Петровым, А. С. Солодовниковым, Л. В. Сабининым, О. В. Мантуровым.

И. П. Егоровым создана в Пензе геометрическая школа. Его многочисленными учениками исследуются движения и проективные движения в пространствах аффинной связности, в пространствах путей и их обобщениях, движения и гомотетические движения в римановых пространствах, в обобщенных метрических пространствах (Финслера, Дейвиса и др.)

В частности, в многочисленных трудах (более 70) А. И. Егоров обобщил метод исследования профессора И. П. Егорова на многие пространства тензорных опорных элементов. В основу исследования были положены группы изотропии первого и второго рода и выбор специальных систем координат.

На международном конгрессе математиков в Москве (1965 г.):
K. Yano с супругой, И. П. Егоров, N. H. Kuiper,
В. С. Малаховский с супругой (справа налево)

V. Malakhovsky, Yu. Shevchenko, A. Egorov,
M. Rodionov, N. Sadovnikov, A. Sultanov

Prominent Mathematician — Ivan Petrovich Egorov (on 100th anniversary of his birth)

This work is devoted to 100th anniversary of the birth of prominent geometer I. P. Egorov. The facts from his private life are stated and the main questions of his scientific activity are listed.

УДК 530.12

А. С. Байгашов, А. В. Асташенок
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
a.baigashov@gmail.com
artyom.astashenok@gmail.com

Компактные объекты в модифицированной теории тяготения

Интерес к модифицированным теориям тяготения связан с возможностью объяснения ускоренного расширения Вселенной без введения темной энергии, природа которой неясна. Рассмотрено моделирование компактных звезд в рамках простейшей теории f(R)-гравитации с квадратичным по кривизне членом.

Ключевые слова: модифицированная гравитация, нейтронные звезды, кривизна.

Введение

Ускоренное расширение Вселенной (без «темных» компонент) можно получить, модифицируя общую теорию относительности. Модифицированная гравитация представляет собой